BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM HÀ NỘI

HOÀNG VIỆT

TÍNH CỰC ĐẠI, TÍNH CỰC ĐẠI ĐỊA PHƯƠNG VÀ VẤN ĐỀ XẤP XỈ CỦA CÁC HÀM $\mathcal{F}$-ĐA ĐIỀU HOÀ DƯỚI

Chuyên ngành: Toán giải tích
Mã số: 9.46.01.02

TÓM TẮT LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

Hà Nội - Năm 2018

Công trình được hoàn thành tại: **Khoa Toán - Tin**
Trường Đại học Sư phạm Hà Nội

Người hướng dẫn khoa học: PGS. TS. Nguyễn Văn Trào
GS. TSKH. Đỗ Đức Thái

Phản biện 1: GS. TSKH. Phạm Hoàng Hiệp - Viện Toán học

Phản biện 2: PGS. TS. Nguyễn Thạc Dũng - ĐHKHTN-ĐHQG Hà Nội

Phản biện 3: GS. TS. Nguyễn Quang Diệu - Đại học Sư phạm Hà Nội

Luận án sẽ được bảo vệ trước Hội đồng chấm luận án cấp Trường họp tại Trường Đại học Sư phạm Hà Nội, vào lúc ….. giờ…… ngày …… tháng … năm 2018

Có thể tìm hiểu Luận án tại thư viện:

- Thư viện Quốc gia, Hà Nội
- Thư viện Trường Đại học Sư phạm Hà Nội

Mở đầu

1. Lí do chọn đề tài

Nội dung của toàn bộ luận án này nghiên cứu một lớp đặc biệt các hàm đa điều hòa dưới. Đó là các hàm đa điều hòa dưới plurifine mà ta sẽ viết là $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới. Lịch sử của vấn đề đưa ra nghiên cứu xuất phát từ các kết quả của H. Cartan vào đầu những năm 40 của thế kỉ trước. Khi đó, để khắc phục tính không liên tục của các hàm điều hòa dưới trên $\mathbb{C}$, Cartan đã đưa ra tôpô "fine" trên $\mathbb{C}$ như là tôpô yếu nhất trên $\mathbb{C}$ mà làm cho mọi hàm điều hòa dưới là liên tục. Ông đã thiết lập được một số kết quả đáng chú ý đối với lớp hàm nói trên. Sau đó vào những năm 70 (của thế kỉ trước), Fuglede đã đưa ra các hàm điều hòa fine và hàm chỉnh hình fine và thiết lập mối liên hệ giữa chúng như mối liên hệ giữa hàm điều hòa và hàm chỉnh hình trong các giáo trình giải tích phức. Tổng quát các khái niệm trên lên $\mathbb{C}^n$, Wiegerinck và các cộng sự đã xây dựng tôpô plurifine (ta sẽ kí hiệu là $\mathcal{F}$-tôpô) trên $\mathbb{C}^n$ và xác định khái niệm hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới. Họ đã phát triển thành Lí thuyết đa thế vị plurifine mà ta viết là $\mathcal{F}$-đa thế vị.

Một vấn đề tự nhiên được đặt ra trong Lí thuyết $\mathcal{F}$-đa thế vị là nghiên cứu những vấn đề tương tự của Lí thuyết đa thế vị thông thường cho lớp hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới.

Như ta đã biết, trong số các hàm đa điều hòa dưới trên tập mở Euclidean Ω trong $\mathbb{C}^n$, tồn tại một lớp con giữ vai trò rất quan trọng, có nhiều ứng dụng trong Lí thuyết đa thế vị, đặc biệt trong giải bài toán Dirichlet tổng quát, đó là lớp các hàm đa điều hòa dưới cực đại. Vì thế, nghiên cứu tính cực đại của hàm đa điều hòa dưới trên tập con mở Euclidean trong $\mathbb{C}^n$ là một trong những vấn đề cơ bản của Lí thuyết đa thế vị. Do tính cực đại địa phương của hàm đa điều hòa dưới dễ nhận thấy hơn trong nhiều trường hợp nên một ý tưởng tự nhiên là chuyển việc xét tính cực đại (toàn cục) của hàm đa điều hòa dưới về việc xét tính cực đại địa phương của hàm đó. Tuy nhiên, cho đến nay, việc giải quyết triệt để giữa tính tương đương của

tính cực đại địa phương của một hàm đa điều hòa dưới tùy ý u trên tập mở Ω và tính cực đại của u trên Ω vẫn là bài toán mở.

Một vấn đề khác cũng được nhiều tác giả nghiên cứu trong thời gian gần đây là xấp xỉ hàm đa điều hòa dưới bởi dãy tăng các hàm đa điều hòa dưới xác định trên một miền rộng hơn. Benelkourchi, Cegrell, Hed, Alevin, Persson, ... đã thu được những kết quả sâu sắc về vấn đề trên trong khoảng 10 năm trở lại đây.

Theo hướng tiếp cận trên, Luận án của chúng tôi tập trung nghiên cứu lớp hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới cực đại và vấn đề xấp xỉ của các hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới.

2. Mục đích nghiên cứu của Luận án

Luận án tập trung nghiên cứu một số tính chất của các hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới. Cụ thể, nghiên cứu mối quan hệ giữa tính chất địa phương và toàn cục của các hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới, nghiên cứu thiết lập vấn đề xấp xỉ của các hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới bởi dãy tăng các hàm đa điều hòa dưới thông thường.

3. Đối tượng nghiên cứu

- Hàm đa điều hòa dưới, hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới và hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới cực đại.
- Toán tử Monge-Ampère phức cho lớp hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới hữu hạn.
- Một số lớp hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới trên Ω: $\mathcal{E}_0(\Omega), \mathcal{F}_p(\Omega)$.
- Vấn đề xấp xỉ của các hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới.

4. Phương pháp nghiên cứu

- Sử dụng các phương pháp nghiên cứu lí thuyết trong nghiên cứu toán học cơ bản với công cụ và kĩ thuật truyền thống của Lí thuyết đa thế vị, $\mathcal{F}$-đa thế vị, Giải tích hàm và Giải tích phức.
- Tham gia seminar nhóm, seminar tổ bộ môn để thường xuyên trao đổi, thảo luận, công bố các kết quả nghiên cứu, nhằm thu nhận các thông

tin về tính chính xác khoa học của các kết quả nghiên cứu trong cộng đồng các nhà khoa học chuyên ngành.

5. Những đóng góp của Luận án

- Luận án đã chỉ ra sự tương đương giữa tính chất $\mathcal{F}$-cực đại toàn cục với tính chất $\mathcal{F}$-cực đại $\mathcal{F}$-địa phương của các hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới *liên tục* trên các tập $\mathcal{F}$-mở của $\mathbb{C}^n$ (Định lí 2.1.2).

- Mở rộng kết quả trên và bằng kĩ thuật chứng minh mới, Luận án đã chỉ ra sự tương đương giữa tính chất $\mathcal{F}$-cực đại toàn cục với tính chất $\mathcal{F}$-cực đại $\mathcal{F}$-địa phương của các hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới *bị chặn* trên các tập $\mathcal{F}$-mở của $\mathbb{C}^n$ (Định lí 2.2.2).

  Kết quả này có ý nghĩa khoa học vì nó đúng cho các hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới trên các tập $\mathcal{F}$-mở.

- Luận án đã đưa ra khái niệm miền $\mathcal{F}$-siêu lồi và đưa ra lớp $\mathcal{F}_p(\Omega)$. Với những khái niệm thích hợp như vậy, Luận án đã chứng minh tính chất xấp xỉ được của hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới bởi dãy tăng các hàm đa điều hòa dưới âm trên dãy giảm các miền siêu lồi rộng hơn (Định lí 3.3.1).

6. Ý nghĩa khoa học và thực tiễn của Luận án

- Các kết quả được nêu ra trong Luận án là mới, có tính thời sự, có ý nghĩa khoa học và đã đóng góp vào việc nghiên cứu tính chất của các hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới.

- Về mặt phương pháp, Luận án đã góp phần làm phong phú thêm các công cụ và kĩ thuật nghiên cứu Giải tích phức và Lí thuyết đa thế vị.

7. Cấu trúc của Luận án

Cấu trúc của Luận án được trình bày theo đúng qui định cụ thể đối với luận án tiến sĩ của Trường Đại học Sư phạm Hà Nội. Cấu trúc Luận án bao gồm các phần: Mở đầu, Tổng quan về các vấn đề trong Luận án (Tổng

quan), các Chương, Kết luận, Danh mục công trình trong Luận án, Tài liệu tham khảo.

Nội dung chính của Luận án gồm ba chương như sau:

- **Chương 1. Hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới và toán tử Monge-Ampère phức**

  Chương 1 trình bày một số kiến thức cần thiết về $\mathcal{F}$-tôpô, định nghĩa và một số tính chất của hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới, toán tử Monge-Ampère phức và hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới cực đại, cũng như một số kết quả sẽ sử dụng trong các chương sau.

- **Chương 2. Tính chất địa phương của hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới cực đại**

  Chương 2 đã đưa ra điều kiện *liên tục* hoặc *bị chặn* để đảm bảo điều kiện cần và đủ để một hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới là $\mathcal{F}$-cực đại $\mathcal{F}$-địa phương là $\mathcal{F}$-cực đại toàn thể trên tập $\mathcal{F}$-mở Ω trong $\mathbb{C}^n$. Các kết quả chính thu được là Định lí 2.1.2 và Định lí 2.2.2.

- **Chương 3. Xấp xỉ hàm $\mathcal{F}$-đa điều hoà dưới**

  Chương 3 đã chỉ ra khi nào thì hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới âm u trong $\mathcal{F}$-miền Ω, có thể được xấp xỉ bởi một dãy tăng của các hàm đa điều hòa dưới được xác định trên các lân cận Euclidean của Ω. Kết quả chính của chương là Định lí 3.3.1.

  Phần cuối, trong Kết luận, chúng tôi điểm lại các kết quả nghiên cứu chính đã trình bày trong Luận án. Trong phần Kiến nghị, chúng tôi đưa ra một vài ý tưởng nghiên cứu tiếp theo để phát triển đề tài của Luận án. Chúng tôi hi vọng, sẽ nhận được nhiều sự quan tâm và chia sẻ của các nhà khoa học và đồng nghiệp, giúp hoàn thiện các kết quả nghiên cứu.

Tổng quan về các vấn đề trong Luận án

Như đã trình bày ở trên, hàm đa điều hòa dưới là một trong các đối tượng trung tâm của Lí thuyết đa thế vị. Việc nghiên cứu các hàm đa điều hoà dưới mà trọng tâm của nó là nghiên cứu các toán tử Monge-Ampère phức đã thu hút sự quan tâm của nhiều nhà toán học lớn từ thập niên 30 của thế kỉ XX và đã thu được những kết quả sâu sắc. Những công trình của các tác giả K. Oka, H. Cartan, P. Lelong, E. Bedford, B.A. Taylor, U. Cegrell, S. Kolodziej, ... không chỉ ảnh hưởng sâu sắc đến sự phát triển của Giải tích phức nhiều biến nói riêng mà còn thúc đẩy sự phát triển của nhiều lĩnh vực khác trong Toán học hiện đại.

Theo tôpô Euclidean thông thường, các hàm đa điều hoà dưới nói chung là không liên tục, trong khi tính liên tục lại giữ vai trò then chốt trong nghiên cứu Lí thuyết hàm. Vì thế, việc đưa ra những tôpô mới nhằm mô tả tốt hơn tính liên tục của các hàm đa điều hoà dưới đã được quan tâm từ thập niên 30 của thế kỉ trước.

Năm 2003, El Kadiri đã định nghĩa khái niệm của hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới trên một tập con $\mathcal{F}$-mở của $\mathbb{C}^n$ và đã nghiên cứu các tính chất của các hàm đó. Các hàm này đã được giới thiệu như là các hàm $\mathcal{F}$-nửa liên tục trên, mà hạn chế trên đường thẳng phức là hàm $\mathcal{F}$-điều hòa dưới, ở đó một hàm $\mathcal{F}$-điều hòa dưới được định nghĩa trên một $\mathcal{F}$-miền là nửa liên tục trên và thỏa mãn bất đẳng thức giá trị trung bình. Định nghĩa này là mở rộng tự nhiên hàm đa điều hòa dưới cho hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới.

Năm 2010, El Marzguioui và Wiegerinck đã nghiên cứu tính chất liên tục của các hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới trên tập $\mathcal{F}$-mở. Họ đã chứng minh rằng, hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới là $\mathcal{F}$-liên tục.

Năm 2011, El Kadiri, Fuglede và Wiegerinck đã chứng minh nhiều tính chất quan trọng của các hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới.

Năm 2004 và 2006 trên một miền siêu lồi bị chặn (tương ứng trên một tập mở) $\Omega \subset \mathbb{C}^n$, Cegrell, tương ứng Blocki đã xây dựng toán tử Monge-

Ampère phức đối với một lớp các hàm đa điều hòa dưới không bị chặn. Hơn nữa trong cùng dạng ấy đối với các lớp hàm đa điều hòa dưới bị chặn địa phương, họ đã chứng minh rằng, cực đại là khái niệm địa phương đối với các lớp hàm đa điều hòa dưới mà họ đã giới thiệu và nghiên cứu.

Năm 2014, El Kadiri và Wiegerinck đã định nghĩa toán tử Monge– Ampère trên các hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới hữu hạn trong các tập $\mathcal{F}$-mở và đã chỉ ra rằng nó được xác định là độ đo dương. El Kadiri và Smit đã giới thiệu và nghiên cứu khái niệm của các hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới $\mathcal{F}$-cực đại và các hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới $\mathcal{F}$-cực đại $\mathcal{F}$-địa phương, đó là mở rộng khái niệm của các hàm đa điều dưới cực đại trên một miền Euclidean tới một $\mathcal{F}$-miền của $\mathbb{C}^n$ theo một cách tự nhiên. Họ đã chứng minh rằng mỗi hàm đa điều hòa dưới $\mathcal{F}$-cực đại, $\mathcal{F}$-địa phương, bị chặn xác định trên một tập mở Euclidean là $\mathcal{F}$-cực đại và họ đã đưa ra ví dụ, chỉ ra rằng kết quả này là không khả thi khi hàm không hữu hạn.

Hướng nghiên cứu đầu tiên của Luận án là mở rộng kết quả của các tác giả trên đối với các hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới. Cụ thể, chúng tôi nghiên cứu điều kiện đủ để nhận được tính $\mathcal{F}$-cực đại của các hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới trong các tập $\mathcal{F}$-mở từ tính chất địa phương tương ứng.

Tiếp đến chúng tôi xét bài toán xấp xỉ hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới bởi dãy tăng các hàm đa điều hòa dưới. Lịch sử của vấn đề này là như sau:

Kết quả đầu tiên thuộc về Fornæss và Wiegerinck, đã đưa ra định lí (năm 1989) khẳng định rằng, nếu Ω là miền bị chặn với C^1-biên và u là liên tục trên $\overline{\Omega}$ thì u có thể được xấp xỉ đều trên $\overline{\Omega}$ bởi một dãy của các hàm đa điều hòa dưới trơn được xác định trên các lân cận Euclidean của Ω. Gần đây Avelin, Hed and Persson đã mở rộng kết quả này tới miền với biên địa phương được cho bởi đồ thị của các hàm liên tục. Ngoài ra, theo kết quả của S. Benelkourchi , U. Cegrell, L. Hed và N. X. Hồng, hàm đa điều hòa dưới u có thể được xấp xỉ đơn điệu từ bên ngoài bởi dãy tăng các hàm đa điều hòa dưới, nếu miền Ω có tính chất $\mathcal{F}$-xấp xỉ và u thuộc về một trong những lớp Cegrell trong Ω.

Những kết quả nói trên dẫn đến vấn đề sau: Giả sử u là một hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới âm trong $\mathcal{F}$-miền Ω. Khi nào thì u có thể được xấp xỉ bởi một dãy tăng của các hàm đa điều hòa dưới được xác định trên các lân cận Euclidean của Ω?

Do đó trong luận án này, chúng tôi nghiên cứu và giải quyết hai vấn đề sau đây.

Vấn đề thứ nhất: Nghiên cứu tính chất địa phương của hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới cực đại

Klimek đã chứng minh rằng, một hàm đa điều hòa dưới bị chặn địa phương u xác định trên một tập mở Euclidean là cực đại nếu và chỉ nếu $(dd^c u)^n = 0$, và vì thế, hàm đa điều hòa dưới bị chặn, xác định trên một tập mở Euclidean là cực đại nếu và chỉ nếu nó là cực đại địa phương. Như thế tính cực đại và tính cực đại địa phương đối với hàm đa điều hòa dưới bị chặn địa phương xác định trên một tập mở Euclidean là tương đương.

Mặc dù đối với một hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới bị chặn u được xác định trên một tập $\mathcal{F}$-mở Ω thì toán tử Monge–Ampère phức $(dd^c u)^n$ có thể định nghĩa một cách $\mathcal{F}$-địa phương trong Ω nhưng những kĩ thuật quen thuộc của Klimek và các tác giả khác không áp dụng được cho tình huống u là hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới trên Ω. Chính vì thế, cần phải tìm những kĩ thuật khác để tổng quát kết quả của Klimek cho lớp hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới.

Như đã trình bày ở trên, chúng tôi đưa ra những điều kiện đủ để từ tính chất $\mathcal{F}$-cực đại địa phương của một hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới trên một tập $\mathcal{F}$-mở Ω trong $\mathbb{C}^n$ cũng là $\mathcal{F}$-cực đại trên Ω. Cụ thể: Định lí 2.1.2 chỉ ra rằng, đối với một hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới liên tục trên Ω thì hàm đó $\mathcal{F}$-cực đại trên Ω khi và chỉ khi nó là $\mathcal{F}$-cực đại $\mathcal{F}$-địa phương trên Ω.

Tiếp theo, chúng tôi mở rộng kết quả trên, thay thế điều kiện *liên tục* trong Định lí 2.1.2 bởi điều kiện "yếu" hơn là *bị chặn* của hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới trên một tập $\mathcal{F}$-mở Ω trong $\mathbb{C}^n$. Kết quả nhận được là Định lí 2.2.2, chỉ ra rằng tính chất $\mathcal{F}$-cực đại là tương đương với tính chất $\mathcal{F}$-cực

đại $\mathcal{F}$-địa phương.

Vấn đề thứ hai: Nghiên cứu việc xấp xỉ hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới bởi các hàm đa điều hòa dưới

Chúng tôi đưa ra những điều kiện đủ để một hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới u trong một tập con mở Euclidean Ω được xấp xỉ bởi một dãy tăng các hàm đa điều hòa dưới. Ở đây, việc xấp xỉ hàm u được hiểu theo nghĩa, u có thể được xấp xỉ đều trên $\overline{\Omega}$ bởi một dãy tăng các hàm đa điều hòa dưới trơn xác định trên lân cận Euclidean của Ω.

Bằng cách đưa ra các khái niệm miền $\mathcal{F}$-siêu lồi, định nghĩa lớp hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới $\mathcal{E}_0(\Omega)$ và $\mathcal{F}_p(\Omega)$, chúng tôi đã chứng minh Định lí 3.3.1, trong đó khẳng định rằng mỗi hàm $u \in \mathcal{F}_p(\Omega)$ $(p > 0)$ đều xấp xỉ bởi một dãy tăng các hàm đa điều hòa dưới trong lân cận Ω.

Các kết quả của Luận án đã được báo cáo tại hội nghị, hội thảo sau:

[1] Hội nghị (01/2017), "Xấp xỉ của hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới", Báo cáo Hội nghị khoa học, Khoa Toán - Tin, Trường Đại học Sư phạm Hà Nội.

[2] Hội nghị (12/2017), "Cực đại địa phương của hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới bị chặn", Báo cáo Hội nghị khoa học, Khoa Toán - Tin, Trường Đại học Sư phạm Hà Nội.

[3] Hội nghị Khoa học (8/2018), "Tính chất địa phương của các hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới cực đại", Báo cáo Tiểu ban Giải tích - Đại hội Toán học Việt Nam lần thứ IX - Nha Trang.

Chương 1

Hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới, $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới cực đại và toán tử Monge-Ampère phức

Trong chương này, chúng tôi nhắc lại một số kiến thức cơ bản về $\mathcal{F}$-tôpô trong $\mathbb{C}^n$, hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới, toán tử Monge-Ampère phức cho các hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới, hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới cực đại và đưa ra một số kết quả nghiên cứu đã được sử dụng trong Luận án.

1.1 $\mathcal{F}$-tôpô và hàm $\mathcal{F}$-đa điều hoà dưới

Sau đây, ta nhắc lại một số kiến thức cơ bản về $\mathcal{F}$-tôpô đã được nêu bởi E. Bedford, B. A. Taylor, El. Marzguioui và J. Wiegerinck.

Định nghĩa 1.1.1. *$\mathcal{F}$-tôpô* trên tập mở Euclidean $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ là tôpô yếu nhất trên Ω làm cho mọi hàm đa điều hòa dưới trên Ω là liên tục.

Từ các hàm đa điều hòa dưới luôn là nửa liên tục trên, một cơ sở con địa phương tại bất kì $a \in \Omega$ được cho bởi các tập

$$U(a, \mathbb{B}, \varphi) = \{z \in \mathbb{B} : \varphi(z) > 0\}$$

ở đó $\mathbb{B} \subset \Omega$ là một hình cầu tâm a và $\varphi \in \mathcal{PSH}(\mathbb{B})$ với $\varphi(a) > 0$.

Mệnh đề sau đây mô tả lân cận của điểm a.

Mệnh đề 1.1.2. *Giả sử $\mathcal{F}$-tôpô $\mathcal{F}$ trên một tập mở Euclidean $\Omega \subset \mathbb{C}^n$. Khi đó, các tập $U(a, \mathbb{B}, \varphi)$ tạo thành một cơ sở địa phương đối với $\mathcal{F}$-tôpô $\mathcal{F}$.*

Định lí sau đây được nêu bởi J. Wiegerinck, về tính chất của $\mathcal{F}$-tôpô $\mathcal{F}$.

Định lí 1.1.3. *Giả sử $\mathcal{F}$-tôpô $\mathcal{F}$ trên một tập mở Euclidean $\Omega \subset \mathbb{C}^n$.*

i) $\mathcal{F}$ là tựa-Lindelöf, nghĩa là, mỗi hợp tùy ý của các tập $\mathcal{F}$-mở là hợp của một hợp các tập con đếm được và một tập đa cực.

ii) $\mathcal{F}$ là chính qui đầy, nghĩa là, với mỗi tập $\mathcal{F}$-đóng $A \subset \Omega$ và $a \in \Omega \backslash A$, tồn tại một hàm $\mathcal{F}$-liên tục f sao cho $f|_A = 0$ và $f(a) \neq 0$.

Nhận xét 1.1.4. Tôpô Euclidean yếu hơn $\mathcal{F}$-tôpô.

Tiếp theo, chúng tôi nhắc lại một số định nghĩa, mệnh đề được nêu bởi J. Wiegerinck, M. El Kadiri và M. Smit.

Định nghĩa 1.1.5. Hàm f xác định trên tập $\mathcal{F}$-mở $U \subset \mathbb{R}^n$ được gọi là hàm *$\mathcal{F}$-điều hòa dưới* nếu:

(i) f là $\mathcal{F}$-nửa liên tục trên;

(ii) $f(z) \leqslant \int_{\partial_{\mathcal{F}} V} f d\delta_z^{U \backslash V}$ với V trong một cơ sở địa phương của $\mathcal{F}$-tôpô tại z;

(iii) $f \not\equiv -\infty$ trên mỗi $\mathcal{F}$-thành phần của U.

Định nghĩa 1.1.6. Cho Ω là một tập con $\mathcal{F}$-mở của $\mathbb{C}^n$.

Hàm $f : \Omega \longrightarrow [-\infty, +\infty)$ được gọi là $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới nếu f là $\mathcal{F}$-nửa liên tục trên và với mỗi đường thẳng phức l trong $\mathbb{C}^n$, hạn chế của f tới bất kì $\mathcal{F}$-thành phần của tập con $\mathcal{F}$-mở $l \cap \Omega$ của l là $\mathcal{F}$-điều hòa dưới hoặc $\equiv -\infty$.

Mệnh đề 1.1.7. *Giả sử G và U là các tập $\mathcal{F}$-mở trong $\mathbb{C}^n$ sao cho $G \subseteq U$. Giả sử rằng $u \in \mathcal{F}\text{-}\mathcal{PSH}(U)$, $v \in \mathcal{F}\text{-}\mathcal{PSH}(G)$*

và $\mathcal{F}\text{-}\limsup_{G\ni z\to\zeta} v(z) \leqslant u(\zeta)$ *với mọi* $\zeta \in \partial_{\mathcal{F}} G \cap U$. *Khi đó, hàm*

$$w(z) = \begin{cases} \max(u(z), v(z)) & \text{nếu } z \in G, \\ u(z) & \text{nếu } z \in U \backslash G, \end{cases}$$

thuộc $\mathcal{F}\text{-}\mathcal{PSH}(U)$.

Sau đây, ta nhắc lại một số tính chất của các hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới được nêu bởi M. El Kadiri, B. Fuglede và J. Wiegerinck .

Mệnh đề 1.1.8. *Giả sử* Ω *là tập con mở Euclidean của* $\mathbb{C}^n$.

Với hàm $f : \Omega \to [-\infty; +\infty)$, *các khẳng định sau là tương đương:*

(i) f *là hàm đa điều hòa dưới (theo nghĩa thông thường).*

(ii) f *là hàm* $\mathcal{F}$*-đa điều hòa dưới C-mạnh (tức là, với mọi* $z \in \Omega$, *tồn tại một lân cận compact* K *của* z *trong* Ω *và một dãy* $\{f_j\}$ *các hàm đa điều hòa dưới trong lân cận mở Euclidean của* K *sao cho* $\{f_j\}$ *hội tụ đều đến* f *trên* K*) và không đồng nhất bằng* $-\infty$ *trên bất kì thành phần của* Ω.

(iii) f *là hàm* $\mathcal{F}$*-đa điều hòa dưới và không đồng nhất bằng* $-\infty$ *trên mọi thành phần của* Ω.

Chúng tôi phát biểu và chứng minh hai mệnh đề sau đây mà chúng đã được dùng trong Chương 3.

Mệnh đề 1.1.9. *Cho* Ω *là tập* $\mathcal{F}$*-mở trong* $\mathbb{C}^n$ *và* $u \in \mathcal{F}\text{-}\mathcal{PSH}^-(\Omega)$. *Giả sử* $\chi : \mathbb{R}^- \to \mathbb{R}^-$ *là hàm lồi tăng. Khi đó* $\chi \circ u \in \mathcal{F}\text{-}\mathcal{PSH}^-(\Omega)$.

Mệnh đề 1.1.10. *Giả sử* Ω *là tập* $\mathcal{F}$*-mở trong* $\mathbb{C}^n$ *và* φ *là hàm đa điều hòa dưới chặt trên* $\mathbb{C}^n$, *tức là với mọi* $z \in \mathbb{C}^n$, *tồn tại lân cận mở Euclidean* U *của* z *và* $c > 0$ *sao cho hàm* $\varphi - c|z|^2$ *là đa điều hòa dưới trên* U. *Giả sử* $u, v \in \mathcal{F}\text{-}\mathcal{PSH}^-(\Omega)$ *sao cho*

$$\int_{\Omega \cap \{-\infty < u < v\}} (dd^c \varphi)^n = 0.$$

Khi đó $u \geq v$ *trên* Ω.

1.2 Toán tử Monge-Ampère phức

Trước hết, chúng tôi nhắc lại hai định nghĩa và hai định lí sau, được nêu bởi M. El Kadiri và J. Wiegerinck.

Định nghĩa 1.2.1. Bởi $QB(\mathbb{C}^n)$ ta hiểu đó là σ-đại số trên $\mathbb{C}^n$ được sinh bởi các tập Borel và các tập con đa cực của $\mathbb{C}^n$.

Định lí 1.2.2. *Giả sử u là hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới trên U. Khi đó tồn tại tập đa cực $\mathcal{F}$-đóng E trong U sao cho u là $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới C-mạnh trên $U\backslash E$.*

Định lí 1.2.3. *Giả sử u_1, u_2, v_1, v_2 là các hàm đa điều hòa dưới trên miền $\Omega \subset \mathbb{C}^n$. Nếu $u_1 - u_2 = v_1 - v_2$ trên tập $\mathcal{F}$-mở $\mathcal{O} \subset \Omega$ thì $(dd^c(u_1 - u_2))^n|_{\mathcal{O}} = (dd^c(v_1 - v_2))^n|_{\mathcal{O}}$.*

Từ kết quả trên, ta có thể xác định được toán tử Monge-Ampère cho các hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới hữu hạn. Ta có

Định nghĩa 1.2.4. Giả sử Ω là tập $\mathcal{F}$-mở trong $\mathbb{C}^n$ và $QB(\Omega)$ là hạn chế của $QB(\mathbb{C}^n)$ trên Ω. Giả sử $u_1, \ldots, u_n \in \mathcal{F}\text{-}\mathcal{PSH}(\Omega)$ là hữu hạn. Sử dụng tính chất tựa-Lindelöf của $\mathcal{F}$-tôpô và Định lí 1.2.2, tồn tại một tập đa cực $E \subset \Omega$, một dãy của các tập con $\mathcal{F}$-mở $\{O_k\}$ và các hàm đa điều hòa dưới $f_{j,k}, g_{j,k}$ xác định trên các lân cận Euclidean của $\overline{O}_k$ sao cho $\Omega = E \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} O_k$ và $u_j = f_{j,k} - g_{j,k}$ trên O_k. Ta định nghĩa $O_0 := \emptyset$ và

$$\begin{aligned} &\int\limits_A dd^c u_1 \wedge \ldots \wedge dd^c u_n := \\ &\sum_{j=1}^{\infty} \int\limits_{A \cap (O_j \backslash \bigcup_{k=0}^{j-1} O_k)} dd^c(f_{1,j} - g_{1,j}) \wedge \ldots \wedge dd^c(f_{n,j} - g_{n,j}), \end{aligned} \tag{1.1}$$

$A \in QB(\Omega)$.

Theo Định lí 1.2.3, công thức (1.1) xác định một độ đo trên E.

Chú ý rằng độ đo này không phụ thuộc vào $\{O_k\}$, $\{f_{j,k}\}$ và $\{g_{j,k}\}$. Ta nói nó là *độ đo Monge-Ampère phức* của các hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới.

Sau đây, nhắc lại mệnh đề đã được nêu bởi E. Bedford và B. A. Taylor.

Mệnh đề 1.2.5. *Giả sử Ω là tập $\mathcal{F}$-mở trong $\mathbb{C}^n$ và giả sử $u_1, \ldots, u_n \in \mathcal{F}$-$\mathcal{PSH}(\Omega)$ là hữu hạn. Khi đó, $dd^c u_1 \wedge \ldots \wedge dd^c u_n$ là một độ đo không âm trong $QB(\Omega)$.*

Tiếp theo, chúng tôi đưa ra một số kết quả thông qua hai mệnh đề, mà chúng đã được sử dụng trong Chương 3.

Mệnh đề 1.2.6. *Giả sử Ω là tập $\mathcal{F}$-mở trong $\mathbb{C}^n$ và μ là độ đo không âm trên $QB(\Omega)$. Giả sử $u, v \in \mathcal{F}$-$\mathcal{PSH}(\Omega)$ là hữu hạn sao cho $(dd^c u)^n \geq \mu$ và $(dd^c v)^n \geq \mu$ trong Ω. Khi đó,*

$$(dd^c \max(u, v))^n \geq \mu \text{ trong } \Omega.$$

Kết quả sau đây cho chúng ta tính tựa-liên tục của toán tử Monge-Ampère và các dãy đơn điệu $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới.

Mệnh đề 1.2.7. *Giả sử Ω là tập $\mathcal{F}$-mở trong $\mathbb{C}^n$ và $u \in \mathcal{F}$-$\mathcal{PSH}^-(\Omega)$ là hữu hạn. Giả sử $\{u_j\}$ là một dãy đơn điệu của các hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới âm, hữu hạn, sao cho $u_j \to u$ h.k.n. trên Ω. Khi đó*

$$\int_\Omega f(dd^c u)^n \leq \liminf_{j \to +\infty} \int_\Omega f(dd^c u_j)^n,$$

với mỗi hàm f không âm, bị chặn, $\mathcal{F}$-liên tục trên Ω.

1.3 Hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới cực đại

Bây giờ ta giới thiệu lớp hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới có nhiều tiện ích trong Lí thuyết $\mathcal{F}$-đa thế vị.

Định nghĩa sau, được nêu bởi M. El Kadiri và M. Smit.

Định nghĩa 1.3.1. Giả sử $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ là tập $\mathcal{F}$-mở và giả sử $u \in \mathcal{F}$-$\mathcal{PSH}(\Omega)$. Ta nói rằng u là *$\mathcal{F}$-cực đại* trên Ω nếu với mỗi tập $\mathcal{F}$-mở bị chặn G của $\mathbb{C}^n$ với $\overline{G} \subset \Omega$, và với mỗi hàm $v \in \mathcal{F}$-$\mathcal{PSH}(G)$ sao cho v bị chặn trên trên G và mở rộng $\mathcal{F}$-nửa liên tục trên tới $\overline{G}^{\mathcal{F}}$, thỏa mãn

$$v \leqslant u \text{ trên } \partial_{\mathcal{F}} G \Rightarrow v \leqslant u \text{ trên } G.$$

Năm 2014, El Kadiri và Smit đã chứng minh một số tính chất cơ bản của hàm $\mathcal{F}$-đa điều hoà dưới cực đại. Bởi mệnh đề sau, họ đã chỉ ra một điều kiện cần để một hàm $\mathcal{F}$-đa điều hoà dưới là $\mathcal{F}$-cực đại.

Mệnh đề 1.3.2. *Giả sử f là hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới $\mathcal{F}$-cực đại, hữu hạn trên $\mathcal{F}$-miền U trong $\mathbb{C}^n$. Khi đó ta có $(dd^c f)^n = 0$.*

Các kết quả quan trọng về hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới cực đại được chúng tôi phát biểu thông qua hai mệnh đề sau đây.

Mệnh đề 1.3.3. *Giả sử Ω là tập $\mathcal{F}$-mở trong $\mathbb{C}^n$. Giả sử rằng u là hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới bị chặn trên Ω.*
Khi đó, các điều kiện sau là tương đương:

(a) $u \in \mathcal{F}\text{-}\mathcal{MPSH}(\Omega)$.

(b) $u + g \in \mathcal{F}\text{-}\mathcal{MPSH}(\Omega)$, với mỗi hàm đa điều hòa g trên $\mathbb{C}^n$.

(c) Với mỗi $v \in \mathcal{F}\text{-}\mathcal{PSH}(\Omega)$ và với mỗi tập $\mathcal{F}$-mở $G \subset \Omega$ với $\overline{G} \subset \Omega$, ta có

$$\sup_G (v - u) \leq \sup_{\Omega \setminus G} (v - u).$$

Mệnh đề 1.3.4. *Giả sử Ω là tập $\mathcal{F}$-mở trong $\mathbb{C}^n$ và u là hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới bị chặn trên Ω. Giả sử với mỗi $z \in \mathbb{C}^n$, tồn tại một lân cận mở Euclidean $V_z \subset \mathbb{C}^n$ của z sao cho $u|_{V_z \cap \Omega}$ là $\mathcal{F}$-cực đại trên $V_z \cap \Omega$. Khi đó, u là $\mathcal{F}$-cực đại trên Ω.*

Kết luận của Chương 1

Trong chương này, chúng tôi đã trình bày một số kiến thức cần thiết về $\mathcal{F}$-tôpô, định nghĩa và một số tính chất của hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới và hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới cực đại. Đồng thời cũng đã đưa ra một số kết quả mà đã được sử dụng trong các chương sau. Cụ thể, đã đưa ra định nghĩa về Toán tử Monge-Ampère phức mà đã sử dụng trong hai chương sau, đã đưa ra Mệnh đề 1.3.3, Mệnh đề 1.3.4 (đã được sử dụng trong Chương 2) và

các Mệnh đề 1.1.9, Mệnh đề 1.1.10, Mệnh đề 1.2.5, Mệnh đề 1.2.6 Mệnh đề 1.2.7 (đã được sử dụng trong Chương 3).

Chương 2

Tính chất địa phương của hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới cực đại

Chương này, chúng tôi đưa ra những điều kiện đủ để từ tính chất $\mathcal{F}$-cực đại địa phương của một hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới trên một tập $\mathcal{F}$-mở Ω trong $\mathbb{C}^n$ cũng là $\mathcal{F}$-cực đại trên Ω. Cụ thể: Định lí 2.1.2 chỉ ra rằng, đối với một hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới liên tục trên Ω thì hàm đó $\mathcal{F}$-cực đại trên Ω khi và chỉ khi nó là $\mathcal{F}$-cực đại $\mathcal{F}$-địa phương trên Ω.

Tiếp theo, chúng tôi mở rộng kết quả trên, thay thế điều kiện *liên tục* trong Định lí 2.1.2 bởi điều kiện "yếu" hơn là *bị chặn* của hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới trên một tập $\mathcal{F}$-mở Ω trong $\mathbb{C}^n$. Kết quả nhận được là Định lí 2.2.2, chỉ ra rằng tính chất $\mathcal{F}$-cực đại là tương đương với tính chất $\mathcal{F}$-cực đại $\mathcal{F}$-địa phương.

2.1 Tính cực đại địa phương của hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới liên tục

Trong mục này, chúng tôi sẽ chỉ ra điều kiện *liên tục* của một hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới để đảm bảo điều kiện cần và đủ, một hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới $\mathcal{F}$-cực đại là $\mathcal{F}$-cực đại $\mathcal{F}$-địa phương.

Trước hết, ta có định nghĩa sau:

Định nghĩa 2.1.1. Giả sử $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ là tập $\mathcal{F}$-mở và giả sử $u \in \mathcal{F}\text{-}\mathcal{PSH}(\Omega)$. Hàm u được gọi là *$\mathcal{F}$-cực đại $\mathcal{F}$-địa phương* trên Ω nếu với mỗi $z \in \mathbb{C}^n$,

tồn tại một lân cận $\mathcal{F}$-mở $V_z \subset \mathbb{C}^n$ của z, sao cho $u|_{V_z \cap \Omega}$ là $\mathcal{F}$-cực đại trên $V_z \cap \Omega$.

Kết quả quan trọng nhất của mục này là định lí sau đây.

Định lí 2.1.2. *Giả sử Ω là tập $\mathcal{F}$-mở trong $\mathbb{C}^n$. Giả sử u là hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới liên tục trên Ω. Khi đó u là $\mathcal{F}$-cực đại trên Ω nếu và chỉ nếu nó là $\mathcal{F}$-cực đại $\mathcal{F}$-địa phương trên Ω.*

2.2 Tính cực đại địa phương của hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới bị chặn

Trong mục này, chúng tôi sẽ chỉ ra điều kiện "yếu" hơn là *bị chặn* của một hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới, để đảm bảo điều kiện cần và đủ, một hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới $\mathcal{F}$-cực đại là $\mathcal{F}$-cực đại $\mathcal{F}$-địa phương, đó là mở rộng kết quả ở mục trên, với một kĩ thuật chứng minh mới. Đây là một trong số các kết quả có ý nghĩa khoa học, vì nó đúng cho các hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới trên các tập $\mathcal{F}$-mở. Ngoài ra, chúng tôi cũng chỉ ra một ứng dụng đối với một lớp hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới $\mathcal{F}$-cực đại bị chặn.

Trước hết, ta cần phát biểu và chứng minh bổ đề quan trọng sau đây.

Bổ đề 2.2.1. *Giả sử D là miền siêu lồi trong $\mathbb{C}^n$ và giả sử $\{\varphi_j\}$ là một dãy các hàm đa điều hòa dưới xác định trên các tập con mở Euclidean U_j của D sao cho*

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} U_j \Subset D.$$

Khi đó, tồn tại một dãy tăng của các hàm đa điều hòa dưới âm bị chặn $\{\psi_k\}$ trên D sao cho:

(i) $\psi_k \to 0$ trên $D \backslash E$, ở đó $E \subset D$ là tập đa cực;

(ii) φ_j liên tục trên $U_j \cap \{\psi_k > -1\}$, với mọi $j, k \geq 1$.

Kết quả quan trọng nhất của mục này là định lí sau đây.

Định lí 2.2.2. *Giả sử Ω là tập $\mathcal{F}$-mở trong $\mathbb{C}^n$ và giả sử $u \in \mathcal{F}\text{-}\mathcal{PSH}(\Omega)$ là bị chặn. Khi đó, các khẳng định sau là tương đương:*

(i) u là $\mathcal{F}$-cực đại trên Ω.

(ii) u là $\mathcal{F}$-cực đại $\mathcal{F}$-địa phương trên Ω.

(iii) $(dd^c u)^n = 0$ trên $QB(\Omega)$.

Từ định lí trên, chúng tôi đưa ra ví dụ về các lớp hàm $\mathcal{F}$-đa điều hoà dưới $\mathcal{F}$-cực đại thông qua hệ quả sau.

Hệ quả 2.2.3. *Giả sử Ω là tập $\mathcal{F}$-mở trong $\mathbb{C}^n$ và giả sử $u \in \mathcal{F}\text{-}\mathcal{PSH}(\Omega)$ là bị chặn. Khi đó, với $m \in \mathbb{N}^*$, ta có*

$u \circ \pi \in \mathcal{F}\text{-}\mathcal{MPSH}(\Omega \times \mathbb{C}^m)$,

ở đó $\pi : \mathbb{C}^{n+m} \to \mathbb{C}^n$ là phép chiếu chính tắc.

Kết luận của Chương 2

Trong chương này, chúng tôi đã trình bày Định lí 2.1.2 và Định lí 2.2.2. Cụ thể, đã đưa ra một kĩ thuật chứng minh mới, đã chứng minh được sự tương đương giữa cực đại địa phương và toàn cục đối với lớp hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới trên tập $\mathcal{F}$-mở của $\mathbb{C}^n$, với điều kiện hàm đó *liên tục* hoặc *bị chặn*. Chúng tôi đã đưa ra Bổ đề 2.2.1 và đã sử dụng bổ đề này để chứng minh Định lí 2.2.2. Chương này cũng đưa ra ví dụ về lớp hàm $\mathcal{F}$-đa điều hoà dưới $\mathcal{F}$-cực đại thông qua Hệ quả 2.2.3.

Chương 3

Xấp xỉ hàm $\mathcal{F}$-đa điều hoà dưới

Trong chương này, Chúng tôi đưa ra những điều kiện đủ để một hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới u trên một tập con mở Euclidean Ω được xấp xỉ bởi một dãy tăng các hàm đa điều hòa dưới. Ở đây, việc xấp xỉ hàm u được hiểu theo nghĩa, u có thể được xấp xỉ bởi một dãy tăng các hàm đa điều hòa dưới trơn xác định trên lân cận Euclidean của Ω.

Bằng cách đưa ra các khái niệm miền *$\mathcal{F}$-siêu lồi*, định nghĩa lớp hàm *$\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới* $\mathcal{E}_0(\Omega)$ và $\mathcal{F}_p(\Omega)$, chúng tôi đã chứng minh Định lí 3.3.1, trong đó khẳng định rằng mỗi hàm $u \in \mathcal{F}_p(\Omega)$ $(p > 0)$ đều xấp xỉ bởi một dãy tăng các hàm đa điều hòa dưới trên lân cận Ω.

3.1 Lớp $\mathcal{E}_0$ của các hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới

Trước hết, chúng tôi đưa ra khái niệm miền $\mathcal{F}$-siêu lồi, định nghĩa lớp $\mathcal{E}_0(\Omega)$ của các hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới trên Ω.

Định nghĩa 3.1.1. Một $\mathcal{F}$-miền bị chặn Ω trong $\mathbb{C}^n$ được gọi là *$\mathcal{F}$-siêu lồi*, nếu tồn tại hàm γ_Ω xác định trên một miền siêu lồi bị chặn Ω', sao cho $\Omega = \Omega' \cap \{\gamma_\Omega > -1\}$ và $-\gamma_\Omega$ là $\mathcal{F}$-$\mathcal{PSH}$ trên Ω, $\gamma_\Omega \in \mathcal{PSH}^-(\Omega')$.

Ta nói rằng, một hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới âm bị chặn u xác định trên một miền $\mathcal{F}$-siêu lồi bị chặn Ω thuộc *lớp* $\mathcal{E}_0(\Omega)$, nếu $\int\limits_\Omega (dd^c u)^n < +\infty$ và với mỗi $\varepsilon > 0$ tồn tại $\delta > 0$ sao cho $\overline{\Omega \cap \{u < -\varepsilon\}} \subset \Omega' \cap \{\gamma_\Omega > -1 + \delta\}$.

Mệnh đề 3.1.2. *Giả sử Ω là miền $\mathcal{F}$-siêu lồi bị chặn trong $\mathbb{C}^n$. Khi đó $\mathcal{E}_0(\Omega) \neq \emptyset$.*

Chú ý rằng, mỗi miền siêu lồi bị chặn là $\mathcal{F}$-siêu lồi.

Bây giờ ta đưa ra một ví dụ chỉ ra rằng, tồn tại một miền $\mathcal{F}$-siêu lồi bị chặn Ω mà không có điểm trong theo tôpô Euclidean thông thường. Hơn nữa, Ω thỏa mãn giả thiết của Định lí 3.3.1.

Ví dụ 3.1.3.

Sau đây, ta có mệnh đề.

Mệnh đề 3.1.4. *Giả sử Ω miền $\mathcal{F}$-siêu lồi bị chặn trong $\mathbb{C}^n$. Giả sử rằng $u \in \mathcal{E}_0(\Omega)$ và $v \in \mathcal{F}\text{-}\mathcal{PSH}(\Omega)$ sao cho $u \leq v < 0$ trên Ω. Khi đó $v \in \mathcal{E}_0(\Omega)$ và*

$$\int_\Omega (-\rho)(dd^c v)^n \leq \int_\Omega (-\rho)(dd^c u)^n,$$

với mỗi $\rho \in \mathcal{F}\text{-}\mathcal{PSH}^-(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$.
Hơn nữa, nếu $u = v$ trong $\{u > -\varepsilon_0\}$ với một số $\varepsilon_0 > 0$, khi đó

$$\int_\Omega (dd^c v)^n = \int_\Omega (dd^c u)^n.$$

3.2 Lớp $\mathcal{F}_p$ của các hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới

Trước hết, chúng tôi đưa ra định nghĩa lớp $\mathcal{F}_p(\Omega)$ của các hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới trên Ω.

Định nghĩa 3.2.1. Giả sử Ω là miền $\mathcal{F}$-siêu lồi bị chặn trong $\mathbb{C}^n$ và $p > 0$. Kí hiệu $\mathcal{F}_p(\Omega)$ là họ của các hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới âm u xác định trên Ω, sao cho tồn tại một dãy giảm $\{u_j\} \subset \mathcal{E}_0(\Omega)$ hội tụ điểm tới u trên Ω, thỏa mãn

$$\sup_{j \geq 1} \int_\Omega (1 + (-u_j)^p)(dd^c u_j)^n < +\infty.$$

Chú ý rằng, nếu $u \in \mathcal{F}_p(\Omega)$ thì $u \in \mathcal{F}_q(\Omega)$ với mọi $q \in (0, p)$.

Với những khái niệm thích hợp được đưa ra, chúng tôi trình bày một số kết quả, thông qua các mệnh đề sau.

Mệnh đề 3.2.2. *Giả sử Ω là miền $\mathcal{F}$-siêu lồi bị chặn trong $\mathbb{C}^n$ và $p > 0$. Giả sử $u \in \mathcal{F}_p(\Omega)$, $\{u_j\} \subset \mathcal{E}_0(\Omega)$ sao cho $u_j \searrow u$ trên Ω và*

$$\sup_{j\geq 1} \int_{\Omega} (1 + (-u_j)^p)(dd^c u_j)^n < +\infty.$$

Khi đó

$$\int_{\{u>-\infty\}} (dd^c u)^n = \sup_{j\geq 1} \int_{\Omega} (dd^c u_j)^n.$$

Hơn nữa, nếu u bị chặn thì

$$\int_{\Omega} (-v)(dd^c u)^n = \sup_{j\geq 1} \int_{\Omega} (-v)(dd^c u_j)^n,$$

với mỗi $v \in \mathcal{F}\text{-}\mathcal{PSH}^-(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$.

Mệnh đề 3.2.3. *Giả sử Ω là miền $\mathcal{F}$-siêu lồi bị chặn trong $\mathbb{C}^n$ và $p > 0$. Giả sử $u \in \mathcal{F}_p(\Omega)$ và $v \in \mathcal{F}\text{-}\mathcal{PSH}(\Omega)$ với $u \leq v < 0$.*
Khi đó

$$v \in \mathcal{F}_{\min(p,1)}(\Omega)$$

và

$$\int_{\{v>-\infty\}} (dd^c v)^n \leq \int_{\{u>-\infty\}} (dd^c u)^n.$$

Mệnh đề 3.2.4. *Giả sử Ω là miền $\mathcal{F}$-siêu lồi bị chặn trên $\mathbb{C}^n$ và $p > 0$. Giả sử $u \in \mathcal{F}_{\min(p,1)}(\Omega)$ và $v \in \mathcal{F}\text{-}\mathcal{PSH}^-(\Omega)$, sao cho*

$$(1 + (-u)^p)(dd^c u)^n \leq (1 + (-v)^p)(dd^c v)^n$$

trên $\Omega \cap \{u > -\infty\} \cap \{v > -\infty\}$.
Khi đó $u \geq v$ trên Ω.

3.3 Xấp xỉ hàm $\mathcal{F}$-đa điều hoà dưới

Trong mục này, chúng tôi phát biểu và chứng minh định lí chính của chương, chỉ ra rằng, mỗi hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới thuộc lớp $\mathcal{F}_p(\Omega)$ có thể xấp xỉ bởi dãy tăng các hàm đa điều hòa dưới âm trên dãy giảm các miền siêu lồi chứa Ω .

Định lí 3.3.1. *Giả sử Ω là miền $\mathcal{F}$-siêu lồi bị chặn và $\{\Omega_j\}$ là dãy giảm của các miền siêu lồi bị chặn sao cho $\Omega \subset \Omega_{j+1} \subset \Omega_j$, với mọi $j \geq 1$. Giả sử tồn tại $\rho \in \mathcal{E}_0(\Omega)$, $\rho_j \in \mathcal{PSH}^-(\Omega_j)$ với $\rho_j \nearrow \rho$ h.k.n. trên Ω. Khi đó, với mỗi $p > 0$ và với mỗi $u \in \mathcal{F}_p(\Omega)$, tồn tại một dãy tăng của các hàm $u_j \in \mathcal{PSH}^-(\Omega_j)$ sao cho $u_j \to u$ h.k.n. trên Ω.*

Kết luận của Chương 3

Trong chương này, bằng cách đưa ra các khái niệm miền $\mathcal{F}$-siêu lồi, định nghĩa lớp hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới $\mathcal{E}_0(\Omega)$ và $\mathcal{F}_p(\Omega)$, các mệnh đề, cũng như đã sử dụng toán tử Monge-Ampère phức và các Mệnh đề 1.1.9, Mệnh đề 1.1.10, Mệnh đề 1.2.5, Mệnh đề 1.2.6 Mệnh đề 1.2.7, đã chứng minh Định lí 3.3.1, trong đó khẳng định rằng, mỗi hàm $u \in \mathcal{F}_p(\Omega)$ $(p > 0)$ đều xấp xỉ bởi một dãy tăng các hàm đa điều hòa dưới âm xác định trên dãy giảm các miền siêu lồi rộng hơn.

Kết luận và kiến nghị

I. Kết luận

Luận án đã chỉ ra các điều kiện để có sự tương đương của tính chất $\mathcal{F}$-cực đại $\mathcal{F}$-địa phương và $\mathcal{F}$-cực đại của hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới và đã chỉ ra các điều kiện để thiết lập vấn đề xấp xỉ của hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới bởi các hàm đa điều hòa dưới âm. Cụ thể:

1. Luận án đã chỉ ra rằng, đối với một hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới *liên tục* trên Ω thì hàm đó là $\mathcal{F}$-cực đại trên Ω khi và chỉ khi nó là $\mathcal{F}$-cực đại $\mathcal{F}$-địa phương trên Ω (Định lí 2.1.2).

2. Luận án đã chỉ ra rằng, đối với một hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới *bị chặn* trên Ω thì hàm đó $\mathcal{F}$-cực đại trên Ω khi và chỉ khi nó là $\mathcal{F}$-cực đại $\mathcal{F}$-địa phương trên Ω (Định lí 2.2.2).

3. Luận án đã chỉ ra các điều kiện để thiết lập vấn đề xấp xỉ cho các hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới bởi dãy tăng các hàm đa điều hòa dưới âm trên dãy giảm các miền siêu lồi rộng hơn (Định lí 3.3.1).

II. Kiến nghị

Từ những kết quả thu được của Luận án trong quá trình nghiên cứu, chúng tôi đề xuất một số hướng nghiên cứu tiếp theo như sau:

1. Liệu ta có thể tìm được định nghĩa toán tử Monge-Ampère phức cho các hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới không bị chặn kiểu như Cegrell?

2. Liệu ta có thể giải được phương trình Monge-Ampère phức cho các hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới trên các miền $\mathcal{F}$-mở? Liệu ta có thể nghiên cứu tính

chất nghiệm của phương trình đó như: Tính ổn định nghiệm, tính liên tục, liên tục Holder, ...?

3. Nghiên cứu các tính chất về hàm $\mathcal{F}$-đa điều hòa dưới yếu và áp dụng cho bao đa cực.

Danh mục các công trình sử dụng trong Luận án

[1] N. X. Hong, L. M. Hai and H. Viet, *Local maximality for bounded plurifinely plurisubharmonic functions*, Potential Anal., ISSN 0926 - 2601, **48** (2018), 115-123.

[2] N. X. Hong and H. Viet, *Local property of maximal plurifinely plurisubharmonic functions*, J. Math. Anal. Appl., **441** (2016), 586–592.

[3] N. V. Trao, H. Viet and N. X. Hong, *Approximation of plurifinely plurisubharmonic functions*, J. Math. Anal. Appl., **450** (2017), 1062–1075.